11/05/2024

SIMULAZIONE ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti

Durata massima della prova: 5 ore.

PROBLEMA 1

Considera la famiglia di funzioni $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da:

$$f_k(x) = \frac{x^2 - x + k}{x^2 + 1}$$

dove k è un parametro reale.

1 Dimostra che, per qualsiasi valore reale di k, il grafico della funzione f_k ammette due punti distinti in cui la tangente è parallela all'asse x e che il prodotto delle ascisse di tali punti è -1. Determina poi il valore di k per cui la tangente al grafico della funzione nel suo punto d'intersezione con l'asse y passa per il punto di coordinate $(-1, 2)$.

2 Indica con f_1 la funzione corrispondente al valore di $k = 1$ determinato al punto precedente.
Esegui lo studio completo della funzione f_1, individuando anche i punti di flesso, e tracciane il grafico. Dimostra che il grafico della funzione f_1 è simmetrico rispetto a un punto, di cui devi specificare le coordinate.

3 Calcola, se esistono, i seguenti limiti:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - f_1(x)}{\sin x}$ **b.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - f_1(x)}{\ln x}$ **c.** $\lim\limits_{x \to +\infty} [f_1(x) - \sin x]$ **d.** $\lim\limits_{x \to +\infty} [x \cdot f_1(x) - \sin x]$

4 L'area della regione di piano, contenuta nel primo quadrante, limitata dal grafico della funzione f_1 e dal suo asintoto orizzontale è finita o infinita? Giustifica la risposta.
Considera poi la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} |f_1(x) - 1| & \text{se } |x| \le h \\ 0 & \text{se } |x| > h \end{cases} \quad \text{con } h > 0$$

tracciane il grafico e determina per quale valore di h rappresenta una densità di probabilità.

PROBLEMA 2

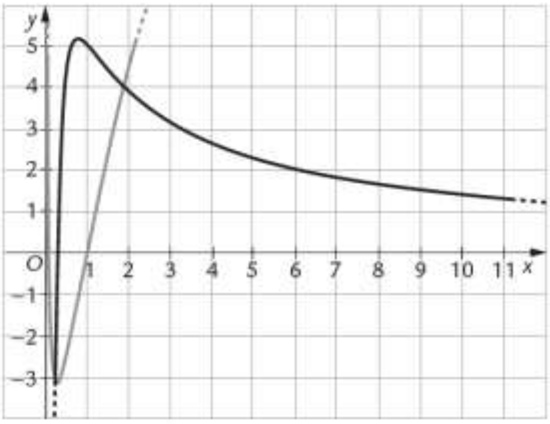
Considera una funzione del tipo: $f(x) = x(a\ln^2 x + b\ln x + c)$, con a, b, c parametri reali.

1 Determina il valore dei parametri, sapendo che la funzione presenta un estremo relativo per $x = e^{-\frac{5}{2}}$, di valore $9e^{-\frac{5}{2}}$, e un punto di flesso a tangente obliqua per $x = e^{-\frac{5}{4}}$.

2 Verificato che la funzione cercata è $f(x) = x(2\ln^2 x + \ln x - 1)$, studiala fino a tracciare il suo grafico, determinando in particolare eventuali asintoti, altri punti di estremo, di cui è richiesta la classificazione, altri punti di flesso, per i quali è richiesto il calcolo della tangente inflessionale.

3 Il grafico della funzione individua, con l'asse delle ascisse, due regioni finite di piano. Calcola la loro area.

4 La seguente figura mostra i grafici delle funzioni $y = f'(x)$ e $y = f''(x)$. Associa ciascuna funzione al corrispondente grafico, motivando la tua scelta.



Senza ricorrere al calcolo di primitive, verifica che:

- il grafico disegnato in grigio forma con l'asse x e l'asse y una regione di piano illimitata di area finita, di cui è richiesto il valore;
- il grafico disegnato in nero forma con l'asse x e l'asse y una regione di piano illimitata di area infinita.

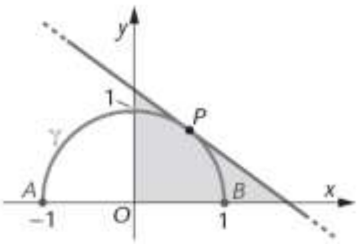
QUESITI

1.

Dimostra che la funzione $f(x) = e^x + \arctan x$ è invertibile. Detta g la sua inversa, calcola $g'(1)$ e scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa 1.

2.

La figura mostra una semicirconferenza γ con centro nell'origine e raggio 1 e un suo punto P del primo quadrante. Individua le coordinate di P in modo che l'area evidenziata, delimitata dagli assi cartesiani e dalla tangente in P a γ, sia minima.

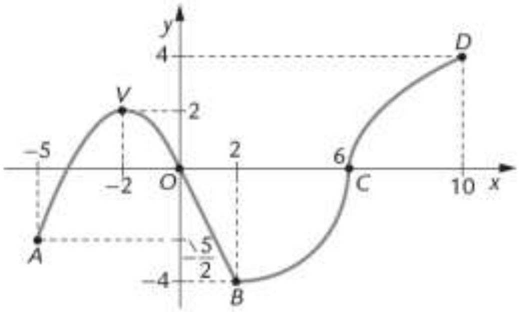


3.

Data la funzione $y = \frac{\ln x}{x}$, determina per quale valore di k, con $k > 0$, la retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa k passa per l'origine.

4.

Considera la funzione $f: [-5, 10] \to \mathbf{R}$ che ha il grafico in figura. L'arco $\widehat{AO}$ appartiene a una parabola con asse verticale, di vertice V; il tratto OB è un segmento; l'arco $\widehat{BC}$ è un quarto di circonferenza e l'arco $\widehat{CD}$ appartiene a una parabola di vertice C avente, come asse di simmetria, l'asse x.



a. Studia la continuità e la derivabilità della funzione f.
b. Determina il valore medio della funzione f nell'intervallo $[0, 10]$.

5.

Dimostra che l'equazione $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ ammette una sola soluzione in $\mathbf{R}$. Più in generale, per quali valori di k l'equazione $x^3 - 3x^2 + kx - 1 = 0$ ammette una sola soluzione in $\mathbf{R}$?

Via della Scienza e della Tecnica, s.n.c. - 00034 Colleferro (RM)
Tel.: 06-121126040-41 - C.F.: 95017680588 - www.marconicolleferro.edu.it
e-mail: rmis02400l@istruzione.it - P.E.C.: rmis02400l@pec.istruzione.it

6. Considera la regione **D** di piano limitata dal grafico della funzione $y = \frac{4}{x}$, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = 2$ e $x = k$, con $k > 2$. Determina per quale valore di k il volume del solido generato da una rotazione completa della regione **D** intorno all'asse x è un quarto del volume del solido ottenuto da una rotazione completa della regione **D** intorno all'asse y.

7. Considera la funzione $f(x) = \ln(x+1) + \int_2^x \frac{2t^2+3t-3}{2t(t-1)}\,dt$ e dimostra che è strettamente crescente per valori di x maggiori di 2.

8. Data la funzione

$$f(x) = a\sqrt[3]{x} + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}$$

determinare i valori dei parametri reali a e b in modo tale che il grafico presenti un punto di flesso in $F(1; 6)$. Stabilire inoltre se la funzione ammetta o meno punti stazionari e, in caso affermativo, se ne indichi la loro natura.